VARIATION DER RECHNUNGSGRUNDLAGEN IN DER INVALIDENVERSICHERUNG

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Basel

von

HANSJOERG WIEDENKELLER

aus Arbon (Thurgau)

1962

Basel 1965

Stephan Joos

VARIATION DER RECHNUNGSGRUNDLAGEN IN DER INVALIDENVERSICHERUNG

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der

Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Basel

von

HANSJOERG WIEDENKELLER

aus Arbon (Thurgau)

Basel 1965

Stephan Joos

Genehmigt von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät auf Antrag der

Herren Prof. Dr. E. Zwinggi und
P.D. Dr. P. Leepin

Basel, den 12. November 1962

Prof. Dr. M. Eichler
Dekan

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN

Meiner lieben Frau

INHALTSVERZEICHNIS

		Seite
Problemstellung	.....	5
I	Bestimmung des Barwertes der Aktivenrente bei Variation der Invaliditätswahrscheinlichkeit	6
A.	Bezeichnungen und exakte, formelmässige Zusammenhänge	6
B.	Näherungsverfahren für die Berechnung der Funktion F (c).....	12
	1. Interpolationsmethoden	12
	a) Lineare Interpolation	12
	b) Parabolische Interpolation	15
	c) Approximation mit gebrochen rationalen Funktionen	16
	2. Übertragung der Formel von Poukka	26
	3. Übertragung der Formel von Palmqvist	28
	4. Übertragung eines Verfahrens von Lotka und Zwinggi	31
II	Bestimmung des Barwertes der anwartschaftlichen, temporären Invalidenrente bei Variation der Invalidierungswahrscheinlichkeit	36
III	Numerische Berechnungen	37
Zusammenfassung	.....	42
Literaturverzeichnis	.....	43

Problemstellung.

Die Invaliditätswahrscheinlichkeit ist im Gegensatz zur Sterbewahrscheinlichkeit stärkeren Schwankungen ausgesetzt. Es kann deshalb nötig sein, die Grundzahlen mit einer grösseren Anzahl von Annahmen über den Verlauf der Invaliditätswahrscheinlichkeit durchzurechnen. Sofern vorausgesetzt wird, dass die Invaliditätswahrscheinlichkeit in Analogie zur Sterbeformel von Makeham verlaufe, sind verschiedene Rechenvereinfachungen möglich.

Ferner zeigt es sich, dass das Problem der Variation der Invalidierungswahrscheinlichkeit gewisse Aehnlichkeiten mit dem Zinsfussproblem aufweist.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, zu prüfen, ob Rechenverfahren, welche bei der Lösung des Zinsfussproblems zum Ziele führten, nicht auch für die Erfassung der Variation der Invalidierungswahrscheinlichkeit herangezogen werden können, ferner abzuklären welche Zinsfussproblemverfahren dafür geeignet sind.

Das Thema dieser Arbeit wurde mir von Herrn Prof. Dr. E. Zwinggi gestellt. Für seine Anregungen bei der Ausarbeitung meiner Dissertation möchte ich ihm bestens danken.

I. BESTIMMUNG DES BARWERTES DER AKTIVENRENTE BEI VARIATION DER INVALIDITAETSWAHRSCHEINLICHKEIT.

A. Bezeichnungen und exakte, formelmässige Zusammenhänge.

Es gelten die folgenden Bezeichnungen :

i_{x+t} : unabhängige, einjährige Invaliditätswahrscheinlichkeit, d.h. Wahrscheinlichkeit, dass ein $x + t$-jähriger im Alter von $x + t$ bis $x+t+1$ Jahren invalid wird, Dabei gilt $i_x = \alpha + \beta c^x$.

q^{aa}_{x+t} : einjährige, unabhängige Sterbenswahrscheinlichkeit eines Aktiven, d.h. Wahrscheinlichkeit, im Alter von $x + t$ bis $x + t + 1$ Jahren zu sterben.

q^{i}_{x+t} : einjährige Sterbenswahrscheinlichkeit eines Invaliden, d.h. Wahrscheinlichkeit, dass ein Invalider im Alter von $x + t$ bis $x + t + 1$ Jahren sterben wird.

i : Zinsfuss, $\frac{1}{1+i} = v$

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$: Barwert der vorschüssigen, temporären Leibrente.

$\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{n}|}$: Barwert der vorschüssigen, temporären Aktivenrente.

$\ddot{a}^{ai}_{x:\overline{n}|}$: Barwert der vorschüssigen, temporären anwartschaftlichen Invalidenrente. Die erste Rentenzahlung erfolge zu Beginn des auf den Eintritt der Invalidität folgenden Versicherungsjahres.

Für die drei aufgeführten Barwerte gilt der Zusammenhang

$$\ddot{a}^{ai}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}^{aa}_{x:\overline{n}|} . \qquad (1)$$

Sodann ist die Überlebensordnung l_{x+t} gegeben durch

$$l_{x+t} = l_x \prod_{k=0}^{t-1} (1-q_{x+k}) \qquad (2)$$

und die Aktivitätsordnung l^{aa}_{x+t} durch

$$l_{x+t} = l^{aa}_x \prod_{k=0}^{t-1} (1-q^{aa}_{x+k})(1-i_{x+k}) . \qquad (3)$$

Wir setzen $l^{aa}_x = l_x$, d.h. die fiktiven Ausgangsbestände sollen zahlenmässig übereinstimmen. Die Sterblichkeit der Aktiven nehmen wir gleich der allgemeinen Sterblichkeit an, so dass $q^{aa}_x = q_x$.

Unter Berücksichtigung der getroffenen Annahmen und unter Verwendung von (2) lautet (3)

$$l^{aa}_{x+t} = l_{x+t} \prod_{k=0}^{t-1} (1-i_{x+k}) . \qquad (4)$$

Bei der Umformung des rechtsstehenden Produktes vernachlässigen wir alle nicht linearen Glieder und erhalten

$$l^{aa}_{x+t} \sim l_{x+t}\left(1 - \sum_{k=0}^{t-1} i_{x+k}\right). \qquad (5)$$

Für die Summe in (5) schreiben wir

$$\sum_{k=0}^{t-1} i_{x+k} = \sum_{k=0}^{t-1} \left(\alpha + \beta c^{x+k}\right)$$

$$= t\alpha + \beta c^{x}\left(1 + c + c^{2} + \ldots + c^{t-1}\right)$$

$$= t\alpha + \beta c^{x}\,\frac{c^{t}-1}{c-1}$$

Die Summe ist damit als geschlossener Ausdruck dargestellt und wird in (5) eingesetzt. Dies führt auf

$$l^{aa}_{x+t} \sim l_{x+t}\left(1 - \left[t\alpha + \beta c^{x}\,\frac{c^{t}-1}{c-1}\right]\right) \qquad (6)$$

$$\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l^{aa}_{x}} \sum_{t=0}^{n-1} v^{t} l^{aa}_{x+t} \sim \frac{1}{l_{x}} \sum_{t=0}^{n-1} v^{t} l^{aa}_{x+t}$$

Wir machen Gebrauch von (6), erweitern mit v^x und erhalten

$$\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{n}|} \sim \frac{1}{D_x}\left\{\sum_{t=0}^{n-1}\left[v^{x+t} l_{x+t}\left(1-\left(t\alpha+\frac{\beta c^x}{c-1}\{c^t-1\}\right)\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{D_x}\left\{\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} - \alpha \sum_{t=0}^{n-1} t D_{x+t} -\right.$$

$$\left. - \frac{\beta c^x}{(c-1)D_x}\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t} c^t + \frac{\beta c^x}{(c-1)D_x}\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}\right.$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{\alpha}{D_x}\left(\sum_{t=0}^{n-1}\binom{t+1}{1} D_{x+t} - \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}\right) -$$

$$- \frac{\beta c^x}{(c-1)D_x}\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}\, c^t + \frac{\beta c^x}{c-1}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{\alpha}{D_x}\left(S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}\right) +$$

$$+ \alpha\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{\beta c^x}{(c-1)D_x}\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}\, c^t + \frac{\beta c^x}{c-1}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

$$= \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\left(1+\alpha+\frac{\beta c^x}{c-1}\right) -$$

$$- \frac{\alpha}{D_x}\left(S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}\right) - \frac{\beta c^x}{(c-1)D_x}\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}\, c^t. \quad (7)$$

Der Aktivitätsrentenbarwert ist umgeschrieben, so dass es leicht fällt, die Auswirkungen der variierten Rechnungsvoraussetzungen auf diesen mit verhältnismässig kleinem Aufwand zu bestimmen.

Die Variation von α und β bei festem c ist ohne viel Rechenarbeit möglich. Es bleibt uns nur übrig, den Parameter c zu variieren.
Dazu setzen wir

$$\sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}\, c^t = F(c)$$

und denken uns diesen Ausdruck für ein $c = c_o$ berechnet.

Abkürzend schreiben wir für $D_{x+t}\, c_o^t = h_{x+t}$

Für die Variation von c setzen wir $c = c_o + \Delta = c_o\left(1 + \frac{\Delta}{c_o}\right)$
und führen diese letzte Grösse in den Ausdruck für F (c) ein.
Es folgt

$$F(c) = \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}\, c_o^t \left(1 + \frac{\Delta}{c_o}\right)^t = \sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t} \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} \left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^k \tag{8}$$

oder mit umgekehrter Summationsreihenfolge

$$F(c) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^k \sum_{t=k}^{n-1} \binom{t}{k} h_{x+t} =$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t} + \frac{\Delta}{c_o} \sum_{t=0}^{n-1} t\, h_{x+t} + \left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2 \sum_{t=0}^{n-1} \binom{t}{2} h_{x+t} + \ldots \tag{9}$$

Das Polynom (9) in $\frac{\Delta}{c_o}$ ist gleich der n-1 ten Partialsumme der Taylorentwicklung von F (c) zur Stelle c_o.

Unter der Annahme, F (c_o) sei eine analytische Funktion, lauten ihre Ableitungen :

$$\frac{dF(c_o)}{dc_o} = \sum_{t=0}^{n-1} t c_o^{t-1} D_{x+t} = \frac{1}{c_o} \sum_{t=0}^{n-1} t c_o^t D_{x+t} = \frac{1}{c_o} \sum_{t=0}^{n-1} t h_{x+t}$$

$$\frac{d^2F(c_o)}{dc_o^2} = \sum_{t=0}^{n-1} t(t-1) c_o^{t-2} D_{x+t} = \frac{1}{c_o^2} \sum_{t=0}^{n-1} t(t-1) h_{x+t}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^pF(c_o)}{dc_o^p} = \sum_{t=0}^{n-1} t(t-1)(t-2)\ldots(t-p+1) c^{t-p} D_{x+t}$$

$$= \frac{1}{c_o^p} \sum_{t=0}^{n-1} t(t-1)(t-2)\ldots(t-p+1) h_{x+t}$$

Die Taylorentwicklung von F (c) zur Stelle c_o heisst :

$$F(c) = F(c_o) + \frac{\Delta}{1!} F'(c_o) + \frac{\Delta^2}{2!} F''(c_o) + \ldots + \frac{\Delta^p}{p!} F^{(p)}(c_o) + \ldots \quad (10)$$

setzt man die Derivierten von F (c_o) ein, so ergibt sich

$$F(c) = F(c_o) + \frac{\Delta}{c_o} \sum_{t=0}^{n-1} \binom{t}{1} h_{x+t} + \frac{\Delta^2}{c_o^2} \sum_{t=0}^{n-1} \binom{t}{2} h_{x+t} + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^p}{c_o^p} \sum_{t=0}^{n-1} \binom{t}{p} h_{x+t} + \ldots$$

mit $G_k = \sum_{t=0}^{n-1} \binom{t}{k} h_{x+t}$ ist $F(c) = G_o + \frac{\Delta}{c_o} G_1 + \ldots + \left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^p G_p + \ldots \quad (11)$

Die Berechnung aller Koeffizienten der Taylorentwicklung wäre viel zu langwierig. Es ist darum nötig die Reihe zu approximieren.

B. Näherungsverfahren für die Berechnung der Funktion F (c).

1. Interpolationsmethoden.

Verschiedene Näherungsformeln lassen sich mit Hilfe der einfachen und der oskulatorischen Interpolation gewinnen. Für die erstere Art muss F (c) für zwei oder mehr Argumentswerte bekannt sein. Bei Anwendung der oskulatorischen Interpolation genügen das gegebene F (c_o) mit einer oder mehreren Ableitungen von F (c_o) nach c_o.

a) Lineare Interpolation.

Wenden wir für $\left(1+\frac{\Delta}{c_o}\right)^t$ im Ausdruck (8) die Bernoullische Ungleichung an, so geht die Ungleichung $\left(1+\frac{\Delta}{c_o}\right)^t \geqslant 1+t\left(\frac{\Delta}{c_o}\right)$ angenähert in eine Gleichung über, da $\frac{\Delta}{c_o}$ ein sehr kleiner Wert ist. Also

$$F(c) = \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}\, c_o^t \left(1+t\frac{\Delta}{c_o}\right)$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}\, c_o^t + \frac{\Delta}{c_o}\sum_{t=0}^{n-1} t\, D_{x+t}\, c_o^t$$

$$F(c) = \sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t} + \frac{\Delta}{c_o}\sum_{t=0}^{n-1} t\, h_{x+t} = G_o + \frac{\Delta}{c_o} G_1 \qquad (12)$$

Die oskulatorische Interpolation mit einer linearen, ganzen Funktion liefert ebenfalls das Ergebnis (12).

Etwas bessere Resultate lassen sich durch Interpolation mit reziproken Argumentswerten oder Funktionswerten erwarten.

Mit den drei Wertepaaren $\left[c_o,\ F(c_o) = F_o\right]$, $\left[c_1,\ F(c_1) = F_1\right]$ und $\left[c,\ F(c) = F\right]$, wo $c_o < c_1 < c$ wird

$$F = F_o + \frac{F_1 - F_o}{c_1 - c_o}(c - c_o) \tag{13}$$

Wir nennen $F - F_o = \Delta F = \frac{F_1 - F_o}{c_1 - c_o}(c - c_o)$

Für (13) lässt sich jetzt setzen

$$F = F_o + \Delta F \tag{14}$$

Nun bilden wir mit den reziproken Argumentswerten $\left(\frac{1}{c_o}, \frac{1}{c_1}, \frac{1}{c}\right)$ die selbe Differenz wie oben,

$$F - F_o = \Delta_1 F = \frac{F_1 - F_o}{\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_o}}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c_o}\right)$$

$$\Delta_1 F = \left(F_1 - F_o\right)\frac{c - c_o}{c_1 - c_o}\ \frac{c_1}{c} = \Delta F\ \frac{c_1}{c}$$

$$\Delta_1 F = \Delta F + \frac{c_1 - c}{c}\Delta F$$

Diesen zuletzt erhaltenen Ausdruck addieren wir zu (14) und mitteln die Korrekturwerte

$$F = F_o + \frac{2\Delta F + \frac{c_1 - c}{c}\Delta F}{2}$$

$$F = F_o + \Delta F + \frac{1}{2}\frac{c_1 - c}{c}\Delta F \qquad (15)$$

Das letzte Glied rechts in (15) ist ein Zusatzglied zum Ausdruck, den man mittels einfacher Interpolation für F erhält.

Im ganzen Interpolationsintervall hat die zweite Ableitung von F positives Vorzeichen. Die Funktion ist in diesem Fall von unten konvex. Das bedeutet, dass der mit einfacher, linearer Interpolation gefundene Näherungswert zu gross ist. Um das Resultat zu verbessern, muss darum das Zusatzglied negativ ausfallen.

Da $c_1 < c$, der Zähler also negativ wird, ist diese Forderung erfüllt Von der Form (15) dürfte somit eine Verbesserung des Ergebnisses erwartet werden, ohne dass der Rechenaufwand stark vergrössert wird.

F (c) sei gegeben für die Argumente c_o und c_1. Daraus ermitteln wir $\frac{1}{F(c_o)}$ und $\frac{1}{F(c_1)}$. Zur neuen, gesuchten Funktion F (c) kommen wir durch lineare Interpolation mit den reziproken Funktionswerten, also

$$F(c) = \frac{F(c_o)F(c_1)(c_1 - c_o)}{F(c_o)(c - c_o) + F(c_1)(c_1 - c)} \qquad (16)$$

b) Parabolische Interpolation.

Die ganze Funktion zweiten Grades

$$F(c) = b_o + b_1 c + b_2 c^2 \qquad (17)$$

sei an den Stellen c_o, c_1, c_2 bekannt.

Daraus ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem

$$F(c_o) = b_o + b_1 c_o + b_2 c_o^2$$

$$F(c_1) = b_o + b_1 c_1 + b_2 c_1^2$$

$$F(c_2) = b_o + b_1 c_2 + b_2 c_2^2$$

Dieses lässt sich sofort nach der Cramer'schen Regel nach den zu bestimmenden drei Konstanten b_o, b_1, b_2 auflösen.

Die gefundenen Werte werden dann in (17) eingesetzt. Es ist aber praktischer mit Hilfe der dividierten Differenzen von Newton die Berechnung durchzuführen.

Eine Parabel n-ten Grades hat konstante n-te Differenzen.

Unsere Parabel ist zweiten Grades, folglich sind die zweiten Differenzen konstant. Das Verfahren gestaltet sich wie folgt :

$$\delta^1(c_o, c_1) = \frac{F(c_1) - F(c_o)}{c_1 - c_o}$$

$$\delta^1(c_1, c_2) = \frac{F(c_2) - F(c_1)}{c_2 - c_1}$$

$$\delta^2(c_0, c_1, c_2) = \frac{\delta^1(c_1 c_2) - \delta^1(c_0 c_1)}{c_2 - c_0} = \text{konstant} = k$$

$$\delta^2(c, c_1, c_2) = \frac{\delta^1(c_1 c_2) - \delta^1(c\, c_1)}{c_2 - c} = \text{hat nach oben den gleichen konstanten Wert } k$$

Die vorhergehende Gleichung lösen wir nach $\delta^1(c, c_1) = \frac{F(c_1) - F(c)}{c_1 - c}$ auf und bestimmen aus dieser letzten Gleichung F (c).

Auch bei der parabolischen Interpolation sind mit reziproken Funktionen vermutlich bessere Werte zu erwarten.

c) Approximation mit gebrochen rationalen Funktionen.

Approximiert man (11) durch eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{\Delta}{c_0}\,\frac{G_1}{G_0}$, so ergibt sich

$$F(c) = G_0 + \frac{\Delta}{c_0} G_1 + \ldots + \left(\frac{\Delta}{c_0}\right)^{n-1} G_{n-1} \sim \frac{G_0}{1 - \frac{\Delta/c_0\, G_1}{G_0}} \qquad (18)$$

Wir können auch folgendermassen approximieren :

$$F(c) = G_0 + \frac{\Delta}{c_0} G_1 \left[1 + \frac{\Delta}{c_0}\frac{G_2}{G_1} + \left(\frac{\Delta}{c_0}\right)^2 \frac{G_3}{G_1} + \ldots + \left(\frac{\Delta}{c_0}\right)^{n-2} \frac{G_{n-1}}{G_1}\right]$$

$$\sim G_0 + \frac{\Delta}{c_0} G_1 \left[\frac{1}{1 - \frac{\Delta}{c_0}\frac{G_2}{G_1}}\right] = G_0 + \frac{\frac{\Delta}{c_0} G_1}{1 - \frac{\Delta}{c_0}\frac{G_2}{G_1}} \qquad (19)$$

Interpolation mit der linear gebrochenen Funktion $F(c_o+\Delta)=\frac{b_o}{1+b_1\Delta}$ führt auf (18). Will man noch genauere Resultate erzielen, so approximiert man mit einer gebrochen rationalen Funktion 2. Grades, also

$$F(c) = G_o+\frac{\Delta}{c_o}G_1+\left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2 G_2\left[1+\frac{\Delta}{c_o}\frac{G_3}{G_2}+\ldots+\left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^{n-3}\frac{G_{n-1}}{G_2}\right]$$

$$\sim G_o+\frac{\Delta}{c_o}G_1+\frac{\left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2 G_2}{1-\frac{\Delta}{c_o}\frac{G_3}{G_2}} \qquad (20)$$

Wir entwickeln die Näherungen nach $\frac{\Delta}{c_o}$ und bestimmen durch Koeffizientenvergleich die Abweichungen gegenüber (11).

Die Fehler betragen

in (18) : $\left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2\left(G_2-\frac{G_1^2}{G_o}\right)+\ldots$

in (19) : $\left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^3\left(G_3-\frac{G_2^2}{G_1}\right)+\ldots$

in (20) : $\left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^4\left(G_4-\frac{G_3^2}{G_2}\right)+\ldots$

Dazu vergleichsweise die Fehler

in (12) : $\left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2 G_2-\left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^3 G_3+\ldots$

in (17) : $\left(\frac{\Delta}{C_o}\right)^3 G_3 + \ldots$

Es ist sofort ersichtlich, dass (18) genauer ist als (12). In (19) und (20) sind die Fehler von der dritten und vierten Ordnung in $\frac{\Delta}{C_o}$. Da $\frac{\Delta}{C_o}$ an sich schon ein sehr kleiner Wert darstellt, sind die Fehler unbedeutend. Die Rechenarbeit gegenüber (12) und (18) ist jedoch wesentlich grösser.

Als Interpolationsfunktion wählen wir weiter die allgemeine lineare Funktion

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{21}$$

Dividiert man den Zähler durch den Nenner aus, so erhält man

$$y = \frac{a}{c} + \frac{1}{c}\frac{bc - ad}{cx + d}$$

Die Zählerdeterminante sei $\neq 0$ und $c = 1$. Damit schreiben wir (21) als

$$y = b_o + \frac{b_1}{b_2 + x}$$

was eine gleichseitige Hyperbel darstellt, deren Asymptoten parallel zu den Koordinatenachsen sind.

Fassen wir nun die Interpolationsfunktion als lineare Transformation auf, welche vier getrennte Abszissenpunkte in die entsprechenden vier Ordinatenwerte überführt, so ist das Doppelverhältnis der Argumentswerte gleich

dem Doppelverhältnis der zugehörigen Funktionswerte.
Wird also die Annahme gemacht, F (c) lasse sich als Funktion des Parameters c als gleichseitige Hyperbel darstellen, so gilt :

$$\frac{c - c_1}{c - c_2} : \frac{c_3 - c_1}{c_3 - c_2} = \frac{F(c) - F(c_1)}{F(c) - F(c_2)} : \frac{F(c_3) - F(c_1)}{F(c_3) - F(c_2)} \quad (22)$$

(22) ist nach dem gesuchten F (c) aufzulösen.

Wenn wir uns weiterhin auf drei Konstanten beschränken, Exponentialfunktionen ausschliessen und $F(c_o)$, $F'(c_o)$ und $F''(c_o)$ als gegeben betrachten, können noch folgende Interpolationsfunktionen verwendet werden :

$$F(c_o + \Delta) = \frac{b_o}{1 + b_1\Delta + b_2\Delta^2}$$

$$F(c_o + \Delta) = \frac{b_o + b_1\Delta}{1 + b_2\Delta^2}$$

$$F(c_o + \Delta) = \frac{b_o + b_2\Delta^2}{1 + b_1\Delta}$$

Die obigen drei Formeln wurden bereits auf ihre Brauchbarkeit für die Berechnung von Zinsfussvariationen untersucht. [10] *
In allen drei Formen entwickeln wir in die Reihe bis Δ^2 und bestimmen durch Koeffizientenvergleich mit (10) die Konstanten.
* Die Zahlen in Klammern [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

$$F(c_o+\Delta) = \frac{F(c_o)}{1-\frac{F'(c_o)}{F(c)}\Delta+\left[\left(\frac{F'(c_o)}{F(c_o)}\right)^2-\frac{F''(c_o)}{2F(c_o)}\right]\Delta^2} = \frac{G_o}{1-\frac{\Delta}{c_o}\frac{G_1}{G_o}+\left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2\left[\left(\frac{G_1}{G_o}\right)^2-\frac{G_2}{2G_o}\right]} \quad (23)$$

$$F(c_o+\Delta) = \frac{F(c_o)+F'(c_o)\Delta}{1-\frac{F''(c_o)}{2F(c_o)}\Delta^2} = \frac{G_o+\left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2\left[\frac{G_2}{2}-\frac{G_1^2}{G_o}\right]}{1-\left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2\frac{G_2}{2G_o}} \quad (24)$$

$$F(c_o+\Delta) = \frac{F(c_o)+\left[\frac{F''(c_o)}{2}-\frac{F'(c_o)^2}{F(c_o)}\right]\Delta^2}{1-\frac{F'(c_o)}{F(c_o)}\Delta} = \frac{G_o+\left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2\left[\frac{G_2}{2}-\frac{G_1^2}{G_o}\right]}{1-\frac{\Delta}{c_o}\frac{G_1}{G_o}} \quad (25)$$

Die Koeffizienten der Glieder dritter Ordnung heissen in

(23) $\dfrac{F'(c_o)\cdot F''(c_o)}{F(c_o)} - \dfrac{F'(c_o)^3}{F(c_o)^2}$

(24) und (25) $\dfrac{F'(c_o)\cdot F''(c_o)}{2F(c_o)}$

Um die Fehler gegenüber dem genauen Koeffizienten $\dfrac{F'''(c_o)}{3!}$

zu erkennen, setzen wir $c_o = 1$, Sterblichkeit und Zins = 0 und normieren

$\downarrow_x^{aa}$ mit 1.

Dadurch wird

$$F(c_0) = n$$

$$F'(c_0) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$F''(c_0) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

$$F'''(c_0) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$$

$$\frac{F^{(k)}(c_0)}{k!} = \binom{n}{k+1}$$

Die Abweichung ist bei

(23) gleich $\frac{n(n+1)(n-1)}{24}$

bei (24) und (25) gleich $-\frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{24}$

Ersetzt man den genauen Koeffizienten $\frac{F'''(c_0)}{3!}$ durch $\frac{F'(c_0)^3}{3F(c_0)^2}$ und lässt die vorhergehenden Glieder stehen, erhält man als weitere Näherung

$$F(c) = F(c_0) + \frac{F'(c_0)}{1!}\Delta + \frac{F''(c_0)}{2!}\Delta^2 + \frac{F'(c_0)^3}{3F(c_0)^2}\Delta^3 \quad (26)$$

Dies gibt verhältnismässig wenig zu rechnen. Der Fehler ist ungefähr gleich wie bei (24). Das beste Ergebnis ist unter Berücksichtigung der getroffenen Vereinfachungen mit (23) zu erwarten. Die, in allen bisher hergeleiteten Formeln vorkommenden Koeffizienten G_k werden numerisch mit Hilfe eines Formelzusammenhangs bestimmt, der für alle höhern Kommutationszahlen gilt. Es bedeute :

$$\phi_x^{(\nu)} = \sum_{\tau=0}^{n-1} \binom{\tau+\nu}{\nu} h_{x+\tau} \qquad (27)$$

Für $\nu = 0$ und $\nu = 1$ ist die Richtigkeit von (27) sofort zu verifizieren. Es ist nämlich

$$\phi_x^{(0)} = \sum_{\tau=0}^{n-1} h_{x+\tau} = \sum_{\tau=0}^{n-1} \binom{\tau+0}{0} h_{x+\tau}$$

Wir nehmen an (27) sei für ein ν bewiesen und schliessen auf $\nu+1$. $h_{x+\tau}$ kommt in allen $\phi_{x+k}^{(\nu)}$ vor, für welche $k \leq \tau$ ist.

Die Zahl der $h_{x+\tau}$ in $\phi_{x+k}^{(\nu)}$ ist demzufolge gleich $\binom{\tau-k+\nu}{\nu}$.

Also ist $$\phi_x^{\nu+1} = \sum_{\tau=0}^{n-1} \phi_{x+\tau}^{(\nu)} = \sum_{\tau=0}^{n-1} \sum_{\varkappa=0}^{\tau} \binom{\varkappa+\nu}{\nu} h_{x+\tau}$$

Nach einem elementaren Satz aus der Kombinatorik ist

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{i+k}{i} = \binom{n+i+1}{i+1}$$

damit wird die innere Summe gleich $\binom{t+\nu+1}{\nu+1}$ und

$$\varphi_x^{\nu+1} = \sum_{t=0}^{n-1} \binom{t+\nu+1}{\nu+1} h_{x+t} \quad .$$

Die Relation (27) gilt also auch für $\nu+1$ und damit für alle natürlichen ν. Darnach ist

$$\varphi_x^{(1)} = \sum_{t=0}^{n-1} \varphi_{x+t}^{(0)} = \sum_{t=0}^{n-1} \binom{t+1}{1} h_{x+t}$$

$$\varphi_x^{(2)} = \sum_{t=0}^{n-1} \varphi_{x+t}^{(1)} = \sum_{t=0}^{n-1} \binom{t+2}{2} h_{x+t}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\varphi_x^{(k)} = \sum_{t=0}^{n-1} \varphi_{x+t}^{(k-1)} = \sum_{t=0}^{n-1} \binom{t+k}{k} h_{x+t}$$

Wenn wir noch beachten, dass

$$\binom{t}{k} = \binom{t+k}{k} - \binom{k}{1}\binom{t+k-1}{k-1} + \binom{k}{2}\binom{t+k-2}{k-2} - + \ldots (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}\binom{k+1}{1} + (-1)^k$$

ist, so ergeben sich für die Koeffizienten G_k die Beziehungen :

$$G_0 = \varphi_x^{(0)}$$

$$G_1 = \varphi_x^{(1)} - \varphi_x^{(0)} = \varphi_{x+1}^{(1)}$$

$$G_2 = \varphi_x^{(2)} - 2\varphi_x^{(1)} + \varphi_x^{(0)} = \varphi_{x+2}^{(2)}$$

$$G_3 = \varphi_x^{(3)} - 3\varphi_x^{(2)} + 3\varphi_x^{(1)} - \varphi_x^{(0)} = \varphi_{x+3}^{(3)}$$

.

.

.

$$G_k = \varphi_x^{(k)} - k\varphi_x^{(k-1)} + \binom{k}{2}\varphi_x^{(k-2)} - + \ldots (-1)^k \varphi_x^{(0)} = \varphi_{x+k}^{(k)}$$

und für die bisher hergeleiteten Näherungen (12), (18), (19), (20), (23), (24), (25), (26) folgt der Reihe nach :

$$F(c) \sim \varphi_x^{(0)} + \frac{\Delta}{c_0}\left(\varphi_x^{(1)} - \varphi_x^{(0)}\right) = \varphi_x^{(0)} + \frac{\Delta}{c_0}\varphi_{x+1}^{(1)} \qquad (12)$$

$$F(c) \sim \frac{\varphi_x^{(0)}}{1 - \frac{\Delta}{c_0}\frac{\varphi_x^{(1)} - \varphi_x^{(0)}}{\varphi_x^{(0)}}} = \frac{\varphi_x^{(0)}}{1 - \frac{\Delta}{c_0}\frac{\varphi_{x+1}^{(1)}}{\varphi_x^{(0)}}} \qquad (18)$$

$$F(c) \sim \varphi_x^{(0)} + \frac{\frac{\Delta}{c_0}\left(\varphi_x^{(1)} - \varphi_x^{(0)}\right)}{1 - \frac{\Delta\left(\varphi_x^{(2)} - 2\varphi_x^{(1)} + \varphi_x^{(0)}\right)}{c_0\left(\varphi_x^{(1)} - \varphi_x^{(0)}\right)}} = \varphi_x^{(0)} + \frac{\frac{\Delta}{c_0}\varphi_{x+1}^{(1)}}{1 - \frac{\Delta\varphi_{x+2}^{(2)}}{c_0\varphi_{x+1}^{(1)}}} \qquad (19)$$

$$F(c) \sim \phi_x^{(o)} + \frac{\Delta}{c_o}\left(\phi_x^{(1)} - \phi_x^{(o)}\right) + \frac{\left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2\left(\phi_x^{(2)} - 2\phi_x^{(1)} + \phi_x^{(o)}\right)}{1 - \frac{\Delta}{c_o}\frac{\left(\phi_x^{(3)} - 3\phi_x^{(2)} + 3\phi_x^{(1)} - \phi_x^{(o)}\right)}{\left(\phi_x^{(2)} - 2\phi_x^{(1)} + \phi_x^{(o)}\right)}} =$$

$$= \phi_x^{(o)} + \frac{\Delta}{c_o}\phi_{x+1}^{(1)} + \frac{\left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2 \phi_{x+2}^{(2)}}{1 - \frac{\Delta}{c_o}\frac{\phi_{x+3}^{(3)}}{\phi_{x+2}^{(2)}}} \qquad (20)$$

$$F(c) \sim \frac{\phi_x^{(o)}}{1 - \frac{\Delta}{c_o}\frac{\phi_x^{(1)} - \phi_x^{(o)}}{\phi_x^{(o)}} + \left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2\left[\frac{\left(\phi_x^{(1)} - \phi_x^{(o)}\right)^2}{\phi_x^{(o)\,2}} - \frac{\phi_x^{(2)} - 2\phi_x^{(1)} + \phi_x^{(o)}}{2\phi_x^{(o)}}\right]} =$$

$$= \frac{\phi_x^{(o)}}{1 - \frac{\Delta}{c_o}\frac{\phi_{x+1}^{(1)}}{\phi_x^{(o)}} + \left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2\left[\frac{\phi_{x+1}^{(1)\,2}}{\phi_x^{(o)}} - \frac{\phi_{x+2}^{(2)}}{2\phi_x^{(o)}}\right]} \qquad (23)$$

$$F(c) \sim \frac{\phi_x^{(o)} + \frac{\Delta}{c_o}\left(\phi_x^{(1)} - \phi_x^{(o)}\right)}{1 - \left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2\frac{\left(\phi_x^{(2)} - 2\phi_x^{(1)} + \phi_x^{(o)}\right)}{2\phi_x^{(o)}}} = \frac{\phi_x^{(o)} + \frac{\Delta}{c_o}\phi_{x+1}^{(1)}}{1 - \left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2\frac{\phi_{x+2}^{(2)}}{2\phi_x^{(o)}}} \qquad (24)$$

$$F(c) \sim \frac{\phi_x^{(o)} + \left(\frac{\Delta}{c_o}\right)^2\left[\frac{\phi_x^{(2)} - 2\phi_x^{(1)} + \phi_x^{(o)}}{2} - \frac{\left(\phi_x^{(1)} - \phi_x^{(o)}\right)^2}{\phi_x^{(o)}}\right]}{1 - \frac{\Delta}{c_o}\frac{\phi_x^{(1)} - \phi_x^{(o)}}{\phi_x^{(o)}}} =$$

$$= \frac{\phi_x^{(0)} + \left(\frac{\Delta}{C_0}\right)^2 \left[\frac{\phi_{x+2}^{(2)}}{2} - \frac{\phi_{x+1}^{(1)\,2}}{\phi_x^{(0)}}\right]}{1 - \frac{\Delta}{C_0}\frac{\phi_{x+1}^{(1)}}{\phi_x^{(0)}}} \qquad (25)$$

$$F(c) \sim \phi_x^{(0)} + \frac{\Delta}{C_0}\left(\phi_x^{(1)} - \phi_x^{(0)}\right) + \frac{\left(\phi_x^{(1)} - \phi_x^{(0)}\right)^3}{3\,\phi_x^{(0)\,2}} = \phi_x^{(0)} + \frac{\Delta}{C_0}\phi_{x+1}^{(1)} + \frac{\phi_{x+1}^{(1)\,3}}{3\phi_x^{(0)2}} \qquad (26)$$

2. Übertragung der Formel von Poukka.

Poukka hat bekanntlich die Konvergenz der Taylorentwicklung des lebenslänglichen Leibrentenbarwertes mit Hilfe der Lindelöfschen Methode verbessert, ohne mehr Glieder der Taylorreihe zu berücksichtigen. Wir benützen sein Verfahren zur Verbesserung der Konvergenz der Potenzreihe (10). Mit der neuen Variablen

$$z = \frac{\Delta}{\alpha + \Delta} \qquad \alpha > 0 \qquad \text{wird} \qquad \Delta = \frac{\alpha z}{1 - z} = \alpha z + \alpha z^2 + \alpha z^3 + \ldots$$

Diese neue Reihe setzen wir in (10) ein und vernachlässigen höhere als zweite Potenzen von z ; also

$$F(c) = F(c_0) + F'(c_0)\alpha z + \left(\alpha F'(c_0) + \frac{\alpha^2 F''(c_0)}{2}\right) z^2 + \ldots$$

Damit der Koeffizient von z^2 verschwindet, muss $\alpha = -\frac{2F'(c_0)}{F''(c_0)}$ sein.

Wird $z = \frac{\Delta}{\alpha+\Delta}$ wieder eingesetzt, folgt

$$F(c) = F(c_o) + F'(c_o) - \frac{2F'(c_o)}{F''(c_o)} \frac{\Delta}{\frac{-2F'(c_o)}{F''(c_o)} + \Delta}$$

$$F(c) = F(c_o) + \frac{\Delta F'(c_o)}{1 - \frac{\Delta F''(c_o)}{2F'(c_o)}} = G_o + \frac{\frac{\Delta}{c_o} G_1}{1 - \frac{\Delta/c_o\, G_2}{2G_1}}$$

$$F(c) = \phi_x^{(o)} + \frac{\frac{\Delta}{c_o}(\phi_x^{(1)} - \phi_x^{(o)})}{1 - \frac{\Delta/c_o\,(\phi_x^{(2)} - 2\phi_x^{(1)} + \phi_x^{(o)})}{2(\phi_x^{(1)} - \phi_x^{(o)})}} =$$

$$= \phi_x^{(o)} + \frac{\frac{\Delta}{c_o}\phi_{x+1}^{(1)}}{1 - \frac{\Delta/c_o\,\phi_{x+2}^{(2)}}{2\,\phi_{x+1}^{(1)}}} \qquad (28)$$

3. Übertragung der Formel von Palmqvist.

Auf Grund der Überlegungen, die Palmqvist zu seiner bekannten Näherungsformel für den Leibrentenbarwert geführt haben, leiten wir eine weitere Näherung für die Funktion F (c) her.

Wir setzen $F(c) = g(y(\Delta))$, wobei $g'(y)$ stets positiv oder stets negativ sein muss.

Es sei $g(y) = \frac{1}{y^2}$, wobei $y = y(\Delta)$ nach Δ bis zur ersten Potenz entwickelt und nachher in g (y) eingesetzt wird.

$$F(c) = g(y) = \sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t} + \frac{\Delta}{C_o} \sum_{t=0}^{n-1} t h_{x+t} + \dots$$

$$y = \left(\sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t} + \frac{\Delta}{C_o} \sum_{t=0}^{n-1} t h_{x+t} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t} \right)^{-\frac{1}{2}} - \binom{\frac{1}{2}}{1} \left(\sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t} \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\Delta}{C_o} \sum_{t=0}^{n-1} t h_{x+t}$$

$$= \left(\sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\Delta}{C_o} \frac{\sum_{t=0}^{n-1} t h_{x+t}}{2 \sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t}} \right)$$

$$F(c) = g(y) = \sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t} \left(1 - \frac{\Delta}{C_0} \frac{\sum_{t=0}^{n-1} t\, h_{x+t}}{2 \sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t}} \right)^{-2} = \varphi_x^{(0)} \left(1 - \frac{\Delta}{C_0} \frac{\varphi_{x+L}^{(1)}}{2 \varphi_x^{(0)}} \right)^{-2} \quad (29)$$

Wegen der komplizierten Wurzel ist letzte Formel zur Berechnung nicht sehr günstig.

Zwinggi hat aus Formel (29) eine praktische Interpolationsformel hergeleitet. Anstelle von

$g(y) = \frac{1}{y^2}$ verwenden wir die Abbildungsfunktion $g(y) = \frac{1}{y^k}$

Damit lautet (29)

$$F(c) = F(c_0) \left[1 - \frac{\Delta}{C_0} \frac{\sum_{t=0}^{n-1} t\, h_{x+t}}{k \sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t}} \right]^{-k} \quad (29')$$

In (29') wird k empirisch bestimmt. Setzt man z.B. k = 1, so geht (29') in (18) über.

Die Rechnung mit (29), wo k = 2 ist zeigt, dass das beste k wenig unter dem Wert 2 liegt.

Mit den Abkürzungen

$$\frac{1}{k} = m, \quad A = \left[\frac{\sum_{t=0}^{n-1} t\, h_{x+t}}{C_0 \sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t}} \right] = \frac{1}{C_0} \frac{\left[\sum_{t=0}^{n-1} \binom{t+1}{1} h_{x+t} - \sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t} \right]}{\sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t}}$$

schreibt sich (29') wie folgt :

$$F(c) = F(c_o)\left(1 - m\Delta A\right)^{-\frac{1}{m}} \qquad (30)$$

für $c = c_1$ ist $F(c_1) = F(c_o)\left(1 - m\Delta A\right)^{-\frac{1}{m}}$

$$F(c_1)^{-m} = F(c_o)^{-m}\left(1 - m\Delta A\right)$$

$$\frac{F(c_o)^{-m} - F(c_1)^{-m}}{\Delta} F(c_o)^{m} = Am$$

Wenn wir $F(c_1)$ und $F(c_o)$ als gegeben betrachten, ist Am berechenbar und wird nachher in (30) eingeführt.

Erhebt man (30) in die -mte Potenz, so zeigt sich, dass die -mten Potenzen von F (c) linear in Funktion von c verlaufen. Daraus folgt, dass $m = \frac{1}{k}$ eine konstante Zahl sein muss.

4. Übertragung eines Verfahrens von Lotka und Zwinggi.

Ein Verfahren von Lotka zur Bestimmung der Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung, wurde von Zwinggi [3] dazu benutzt, Versicherungswerte zu einem neuen Zinsfuss zu berechnen, ohne den Umweg über den Leibrentenbarwert zu machen. Es eignet sich zum vornherein auch für die näherungsweise Bestimmung von Barwerten.

Wir gehen von folgendem Ansatz aus :

$$F(c_o+\Delta) = F(c_o)\, e^{f(\Delta)}$$

Zu bestimmen ist die Funktion $f(\Delta)$.

Dazu setzen wir :

$$c_o = e^{w_o} \quad \text{mit} \quad w = w_o - \Delta$$
$$c = e^{w}$$

Mit den soeben festgelegten Bezeichnungen erhalten wir für

$$F(c) = \sum_{t=0}^{n-1} c^t D_{x+t} = \sum_{t=0}^{n-1} e^{(w_o-\Delta)t} D_{x+t} = \sum_{t=0}^{n-1} h_{x+t}\, e^{-\Delta t} \qquad (31)$$

(31) differenzieren wir partiell nach Δ

$$\frac{\partial F(c)}{\partial \Delta} = -\sum_{t=0}^{n-1} t \exp\left[-\Delta t\right] h_{x+t}$$

Die Ableitung dividieren wir durch F (c)

$$\frac{\partial F(c)}{\partial \Delta F(c)} = \frac{-\sum_{t=0}^{n-1} t \exp(-\Delta t)\, h_{x+t}}{\sum_{t=0}^{n-1} \exp(-\Delta t)\, h_{x+t}} \tag{32}$$

Dies stellt eine homogene, lineare Differentialgleichung dar, deren Variablen bereits getrennt sind. Wenn wir noch die Exponentialfunktionen entwickeln, wobei nur die ersten drei Glieder der Reihe berücksichtigt werden, so lautet (32)

$$\frac{\partial F(c)}{\partial \Delta F(c)} = \frac{-\sum_{t=0}^{n-1} t\left(1 - \frac{\Delta}{1!}t + \frac{\Delta^2}{2!}t^2 - + \ldots\right) h_{x+t}}{\sum_{t=0}^{n-1}\left(1 - \Delta t + \frac{\Delta^2 t^2}{2!} - + \ldots\right) h_{x+t}}$$

abkürzend schreiben wir $R_k = \sum_{t=0}^{n-1} t^k h_{x+t}$

$$\frac{\partial F(c)}{\partial \Delta F(c)} = \frac{-R_1 + \Delta R_2 - \frac{\Delta^2}{2!} R_3 - + \ldots}{R_0 - \Delta R_1 + \frac{\Delta^2}{2!} R_2 - +} = a_0 + a_1\Delta + a_2\Delta^2 + \ldots \tag{33}$$

In dieser letzten Form integrieren wir die Differentialgleichung. Die Koeffizienten a_ν ($\nu = 0,1,2, \ldots$) ergeben sich durch Heraufmultiplizieren mit dem Nenner und Koeffizientenvergleich zu

$$a_0 = -\frac{R_1}{R_0} \quad , \quad a_1 = -a_0^2 + \frac{R_2}{R_0}$$

$$a_2 = a_0^3 - \frac{3R_2}{2R_0}a_0 - \frac{R_3}{2R_0}$$

Gleichung (33) integriert liefert

$$F(c) = Ce^{\int(a_0 + a_1\Delta + \frac{a_2\Delta^2}{2} + \ldots)\,d\Delta} \;;$$

für $\Delta = 0$ wird die Integrationskonstante $C = F(c_0)$, also

$$F(c) = F(c_0)e^{\int(a_0 + a_1\Delta + a_2\frac{\Delta}{2!} + \ldots)\,d\Delta} = F(c_0)e^{a_0\Delta + a_1\frac{\Delta^2}{2!} + a_2\frac{\Delta^3}{3!} + \cdots} \qquad (34)$$

Für kleine Aenderungen des Parameters c mag die reduzierte Form

$$F(c) = F(c_0)e^{a_0\Delta} \qquad \text{genügen.} \qquad (35)$$

Daraus lässt sich noch eine weitere Interpolationsformel herleiten.

Für ein $c = c_1 = (c_0 + \Delta_1)$ ist

$$F(c_1) = F(c_0)e^{a_0\Delta_1}$$

$$\frac{F(c_1)}{F(c_0)} = e^{a_0\Delta_1}$$

$$\lg\frac{F(c_1)}{F(c_0)} = a_0\Delta_1$$

$$\frac{1}{\Delta_1} \lg \frac{F(c_1)}{F(c_0)} = a_0$$ Dieser Wert in (35) eingeführt,

ergibt

$$F(c) = F(c_0) e^{\frac{\Delta}{\Delta_1} \lg \frac{F(c_1)}{F(c_0)}} = F(c_0) \left(\frac{F(c_1)}{F(c_0)} \right)^{\frac{\Delta}{\Delta_1}}$$

Durch dieses Vorgehen kann wiederum die Berechnung der Kommutationszahlen umgangen werden.

Lässt man bei diesem Verfahren c_0^x unter dem Summenzeichen, so lauten die Momente $R_k = \sum_{t=0}^{n-1} (x+t)^k h_{x+t}$

Ihre Überführung in Kommutationszahlen ist etwas komplizierter.

$\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{n}|}$ wird in jedem Falle nach (7) berechnet. Im letzten Glied rechts muss jeweils $\frac{\beta c^x}{D_x (c-1)} F(c)$ gesetzt werden.

Die praktische Rechnung wird zeigen, mit welchem Verfahren das beste Ergebnis erzielt wird.

Unsere Formeln sind für ein tiefstes Abschlussalter x aufgeschrieben. Für ein um τ Jahre höheres Abschlussalter bei gleichem Schlussalter summieren wir jeweils von τ bis (n - 1), d.h.

$$F(c) = \sum_{t=\tau}^{n-1} c^t D_{x+t} = c^\tau \sum_{t=0}^{n-1-\tau} c^t D_{x+\tau+t}$$

für $c = c_0 + \Delta$ ist

$$F(c) = \left(\frac{c_0+\Delta}{c_0} \right)^\tau \left\{ \sum_{t=0}^{n-1-\tau} h_{x+\tau+t} + \frac{\Delta}{c_0} \sum_{t=0}^{n-1-\tau} \binom{t+1}{1} h_{x+\tau+t} + \ldots \right\}$$

entsprechend ist auch :

$$\sum_{t=0}^{n-1-\tau} h_{x+\tau+t} = \varnothing^{(0)}_{x+\tau}$$

$$\sum_{t=0}^{n-1-\tau} \binom{t+1}{1} h_{x+\tau+t} = \varnothing^{(1)}_{x+\tau}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{t=0}^{n-1-\tau} \binom{t+\nu}{\nu} h_{x+\tau+t} = \varnothing^{(\nu)}_{x+\tau}$$

II. BESTIMMUNG DES BARWERTES DER ANWARTSCHAFTLICHEN, TEMPORAEREN INVALIDENRENTE BEI VARIATION DER INVALIDIERUNGSWAHRSCHEINLICHKEIT.

Unter den getroffenen Annahmen ist der Barwert dieser Rente gegeben durch

$$\ddot{a}^{ai}_{x:\overline{n|}} = \frac{1}{|^{aa}_{x}} \sum_{t=0}^{n-1} |^{aa}_{x+t} \; i^{*}_{x+t} \; v^{x+t+1} \; \ddot{a}^{i}_{x+t+1 \,:\, \overline{n-t-1|}}$$

In der Praxis wird im allgemeinen die Anzahl der invalid gewordenen Versicherten mit $|^{aa}_{x+t} \; i^{*}_{x+t}$ angegeben. Für unsere Ausführungen ist es aber belanglos, dass wir für die Invaliditätswahrscheinlichkeit die unabhängige Grösse verwendet haben, weil i_x dem Makehamansatz folgt.
Mit Hilfe von (1) bestimmen wir aus den verschieden errechneten Werten des Aktivitätsrentenbarwertes die entsprechende Grösse der temporären, anwartschaftlichen Invalidenrente.
Führen wir (7) in (1) ein, so folgt :

$$\ddot{a}^{ai}_{x:\overline{n|}} = \ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{x:\overline{n|}} + \frac{\alpha}{D_x}\left(S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}\right) - \alpha\ddot{a}_{x:\overline{n|}} + \frac{\beta c^x}{(c-1)\,D_x} F(c) - \frac{\beta c^x}{(c-1)} \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

$$\ddot{a}^{ai}_{x:\overline{n|}} = \frac{\alpha}{D_x}\left(S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}\right) - \ddot{a}_{x:n}\left(\alpha + \frac{\beta c^x}{c-1}\right) + \frac{\beta c^x F(c)}{(c-1)\,D_x} \qquad (37)$$

Die Näherungsformel wird man zur Berechnung beiziehen, wenn die entsprechenden Werte für $\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{n|}}$ nicht vorher numerisch bestimmt worden sind.

III. NUMERISCHE BERECHNUNGEN.

Die Genauigkeit der Formeln soll an einigen Beispielen geprüft werden.

Den Berechnungen liegen folgende Annahmen zu Grunde :

SM 1948/53, i = 3 %, Endalter einheitlich s = 60 Jahre,

x = jeweiliges Abschlussalter. s - x = n = Versicherungsdauer.

Parameter der Makeham Formel :

α	= 0,0001	variiertes c =	1,12
β	= 0,00007		1,11
c_o	= 1,10		1,09

Die exakten Werte sind nach Gl. (7) und $\ddot{a}^{ai}_{x:\overline{n}|}$ nach Gl. (1) ermittelt worden, wobei zu beachten ist, dass Gl. (7) an sich schon eine Approximation darstellt.

Tabelle 1 zeigt, welcher Variationsbereich für i_x mit den getroffenen Annahmen erreicht wird.

Tabelle 1

x	c = 1,10	c = 1,09	c = 1,11	c = 1,12
20	0,00057	0,00066	0,00039	0,00078
30	0,00132	0,00170	0,00093	0,00220
40	0,00327	0,00467	0,00220	0,00661
50	0,00832	0,01302	0,00510	0,02033
59	0,01948	0,03315	0,01140	0,05620

Für x = 59 ist der Variationsbereich bei einer Aenderung von c = 1,10 auf : c = 1,09 gleich 1,71
c = 1,12 gleich 2,89.

Ein grösserer Variationsbereich als 2,89 für das höchstmögliche Abschlussalter wird praktisch nicht vorkommen.

Um unsere Ausführungen auf den Seiten 8 und 9 zahlenmässig zu belegen, sind in Tabelle 2 die Werte für F (c) = F (1,10) nach (14), (15) und (16) berechnet. Gegeben sind die Funktionswerte F (c) für c = 1,09 und c = 1,11.

Tabelle 2

F (c) = F (1,10)							
x	exakt	genähert nach (14)	Differenz	genähert nach (15)	Differenz	genähert nach (16)	Differenz
20	8'968'186	9'238'539	270'353	9'228'351	260'165	8'734'775	233'411
30	8'260'550	8'555'748	295'199	8'545'825	285'275	7'998'652	261'898
40	6'922'418	7'205'595	283'177	7'196'505	274'087	6'650'506	271'912
50	4'426'971	4'727'082	300'111	4'720'590	293'619	4'208'118	218'853

In Tabelle 3 und 3 a sind der exakte Wert und die, gemäss den verschiedenen Näherungsformeln erhaltenen approximativen Werte für $\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{n}|}$ und $\ddot{a}^{ai}_{x:\overline{n}|}$ bei Übergang vom Parameter c = 1,10 auf c = 1,11 und c = 1,12 dargestellt.

Tabelle 3

$\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{n}|}$

c = 1,09

x	exakt	genähert nach (12)	genähert nach (18)	genähert nach (23)	genähert nach (24)	genähert nach (26)	genähert nach (28)	genähert nach (29)
20	22,290	22,307	22,292	22,292	22,287	22,286	22,301	22,279
30	18,610	18,624	18,611	18,615	18,611	18,611	18,618	18,607
40	13,807	13,822	13,809	13,809	13,807	13,805	13,807	13,806
50	7,710	7,711	7,710	7,710	7,710	7,710	7,710	7,710

c = 1,11

x	exakt	genähert nach (12)	genähert nach (18)	genähert nach(23)	genähert nach (24)	genähert nach (26)	genähert nach (28)	genähert nach (29)
20	21,762	21,793	21,756	21,777	21,755	21,760	21,643	21,746
30	17,908	17,930	17,903	17,913	17,902	17,908	17,912	17,900
40	12,932	12,942	12,932	12,935	12,929	12,932	12,936	12,928
50	6,842	6,844	6,840	6,843	6,839	6,842	6,843	6,845

c = 1,12

x	exakt	genähert nach (12)	genähert nach (18)	genähert nach (23)	genähert nach (24)	genähert nach (26)	genähert nach (28)	genähert nach (29)
20	21,309	21,408	21,289	21,398	21,217	21,297	21,389	21,248
30	17,298	17,410	17,245	17,404	17,236	17,316	17,359	17,250
40	12,158	12,220	12,165	12,162	12,150	12,181	12,194	12,147
50	6,048	6,070	6,060	6,066	6,028	6,064	6,065	6,056

Tabelle 3 a

$\ddot{a}^{ai}_{x:\overline{n}|}$

x	exakt	genähert nach (12)	genähert nach (18)	genähert nach (23)	genähert nach (24)	genähert nach (26)	genähert nach (28)	genähert nach (29)
	c = 1,09							
20	0,518	0,501	0,516	0,516	0,521	0,522	0,507	0,529
30	0,680	0,666	0,679	0,675	0,679	0,679	0,672	0,683
40	0,767	0,752	0,765	0,765	0,767	0,769	0,767	0,768
50	0,683	0,682	0,683	0,683	0,683	0,683	0,683	0,683
	c = 1,11							
x	exakt	genähert nach (12)	genähert nach (18)	genähert nach (23)	genähert nach (24)	genähert nach (26)	genähert nach (28)	genähert nach (29)
20	1,046	1,015	1,052	1,031	1,053	1,048	1,165	1,062
30	1,382	1,360	1,387	1,377	1,388	1,382	1,378	1,390
40	1,642	1,632	1,642	1,639	1,645	1,642	1,638	1,646
50	1,551	1,549	1,553	1,550	1,554	1,551	1,550	1,548
	c = 1,12							
x	exakt	genähert nach (12)	genähert nach (18)	genähert nach (23)	genähert nach (24)	genähert nach(26)	genähert nach (28)	genähert nach (29)
20	1,499	1,400	1,519	1,410	1,591	1,511	1,419	1,560
30	1,992	1,880	2,045	1,886	2,054	1,974	1,931	2,040
40	2,416	2,354	2,409	2,412	2,424	2,393	2,380	2,427
50	2,345	2,323	2,333	2,327	2,365	2,329	2,328	2,337

Tabelle 4 zeigt die, mittels einfacher Interpolation gewonnenen Näherungen für $\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{n}|}$ und $\ddot{a}^{ai}_{x:\overline{n}|}$ mit Hilfe der für die Stützstellen c = 1,09 und c = 1,11 berechneten Funktion F (c).

Tabelle 4

	$\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{n}|}$					
	c = 1,10				c = 1,12	
x	exakt	interpol. nach (15)	interpol. nach (16)	interpol. nach (36)	exakt	extrapol. nach (36)
20	22,071	22,048	22,095	22,071	21,309	21,316
30	18,325	18,302	18,345	18,320	17,298	17,306
40	13,454	13,428	13,480	13,454	12,158	12,157
50	7,365	7,349	7,370	7,366	6,048	6,040
	$\ddot{a}^{ai}_{x:\overline{n}|}$					
	c = 1,10				c = 1,12	
x	exakt	interpol. nach (15)	interpol. nach (16)	interpol. nach (36)	exakt	extrapol. nach (36)
20	0,737	0,760	0,713	0,737	1,592	1,585
30	0,945	0,988	0,935	0,945	2,066	2,058
40	1,120	1,146	1,094	1,120	2,487	2,488
50	1,028	1,044	1,023	1,027	2,388	2,396

Zusammenfassung.

Das Zinsfussproblem und die Erfassung der Variation der Invaliditätswahrscheinlichkeit bei der Berechnung von Barwerten in der Invalidenversicherung gehören zum gleichen versicherungsmathematischen Problemkreis.

In dieser Arbeit prüften wir zuerst, ob eine Übertragung von Zinsfussproblemmethoden bei der Lösung unserer Aufgabe überhaupt möglich ist. Anschliessend untersuchten wir die dafür in Frage kommenden Rechenverfahren.

In Abschnitt A formten wir den Aktivenrentenbarwert um, so dass die Erfassung der Variation $i_x = \alpha + \beta c^x$ in der Invalidenversicherung mit Hilfe geeigneter Zinsfussproblemmethoden möglich wurde.

Alle in der Folge besprochenen Verfahren liefern für die Praxis brauchbare Resultate. Dies durften wir zum vornherein erwarten, da die analytische Funktion $F(c) = \sum_{t=0}^{n-1} D_{x+t}\, c^t$, in der c variiert wird, gleich gebaut ist, wie der beim Zinsfussproblem auftretende Ausdruck $\sum_{t=0}^{n-1} l_{x+t}\, v^t$ in dem v geändert wird.

Im allgemeinen erhalten wir bessere Ergebnisse, wenn wir die Konstanten unserer Interpolationsfunktion als Stellenfunktion des Parameters c darstellen. Die Genauigkeit der Näherung hängt von der Art der Funktion und der Zahl der Annahmen, die ihren Verlauf bestimmen, ab. Für einen kleinen Variationsbereich von i_x ist die Interpolation mit einer linearen, ganzen Funktion hinreichend genau. Für einen grossen Variationsbereich von i_x wird man eine gebrochen rationale Funktion verwenden. Die am Schluss von Abschnitt B erwähnte Interpolationsformel (36) nähert die Funktion F (c) ebenfalls sehr gut an.

Literaturverzeichnis

1. E. Zwinggi : Versicherungsmathematik 2. erw. Auflage 1958.

2. E. Zwinggi : Variation der Rechnungsgrundlagen in der Invalidenversicherung Mvsv 49, 1949.

3. E. Zwinggi : Ein weiteres Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Prämie in der Invalidenversicherung bei Variation der Rechnungsgrundlagen Mvsv 51, 1951.

4. E. Zwinggi : Beiträge zum Zinsfussproblem Bvm 1, 3, 1952.

5. E. Zwinggi : a study of the dependence of the premium on the rate of interest Sa, 33, 1950.

6. K. Poukka : Über die Berechnung der Leibrente bei Veränderung des Zinsfusses, Sa, 6, 1923.

7. H. Christen : Das Zinsfussproblem bei der Leibrente, Mvsv, 25, 1930.

8. E. Hantsch : Das Zinsfussproblem der Leibrenten, 1938.

9. E. Fischer : Das Zinsfussproblem der Lebensversicherungsrechnung als Interpolationsaufgabe, Mvsv , 42, 1942.

10. P. Leepin : Das Zinsfussproblem bei der temporären Leibrente als praktische Aufgabe, Mvsv, 45, 1945.

11. I. Lah : Das Zinsfussproblem, Mvsv, 47, 1947

CURRICULUM VITAE

Ich, Hansjörg Wiedenkeller, wurde am 1. Januar 1931 in Münsterlingen TG als Bürger von Arbon TG geboren. Nach Absolvierung der Primar- und Sekundarschule in Arbon, trat ich 1946 ins Seminar Kreuzlingen ein, aus welchem ich im Frühjahr 1950 als patentierter Primarlehrer des Kt. Thurgau entlassen wurde.

Nach dreijähriger Lehrtätigkeit als Primarlehrer immatrikulierte ich mich im Sommersemester 1953 an der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Zürich, um Mathematik, Physik, Geographie und Zoologie zu studieren.

Das Wintersemester 1955/56 verbrachte ich an der Université de Paris. Im Frühjahr 1956 erwarb ich das thurgauische Sekundarlehrerpatent mathematisch-naturwissenschaftlicher Richtung. Gleichzeitig legte ich an der Universität Zürich das Nebenfachexamen in Physik ab.

Im Wintersemester 1956/57 immatrikulierte ich mich an der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel, um im Hauptfach Versicherungslehre und in den Nebenfächern Mathematik und Geographie weiter zu studieren.

Während meines Studiums war ich mehrere Monate bei Versicherungsgesellschaften, hernach an verschiedenen, öffentlichen Schulen in Basel-Land und Basel-Stadt in fester Anstellung tätig.

An den Universitäten Zürich, Paris und Basel besuchte ich die Vorlesungen und Uebungen der folgenden Herren Professoren und Dozenten :

van der Waerden, Nevanlinna, Finsler, Wyss, Nolfi, Jecklin, Staub, Waeffler, Boesch, Carol, Hadorn, Steiner, Darmois, Dubreuil, Milan, Zwinggi, Gürtler, Ostrowski, H. Huber, Batschelet, Salin, Vosseler, Annaheim.